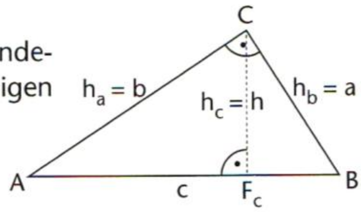
Das rechtwinklige Dreieck als Spezialfall

Im rechtwinkligen Dreieck fällt die Höhe auf eine Kathete jeweils mit der anderen Kathete zusammen. Deshalb meint man mit der Höhe h im rechtwinkligen Dreieck die Höhe auf die Hypotenuse. Es gilt:



Flächeninhalt des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC:
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \qquad A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Aufgaben

1 Berechne die fehlenden Größen im bei C rechtwinkligen Dreieck ABC.

	c	h	A
a)	6,1 cm	5,8 cm	■
b)	■	6,9 m	3 243 dm²
c)	0,4 km	■	84,32 ha

2 Konstruiere das rechtwinklige Dreieck ABC und berechne seinen Flächeninhalt.

a) $a = 6{,}5$ cm $\quad b = 5{,}5$ cm $\quad \gamma = 90°$

b) $b = 4{,}9$ cm $\quad c = 7{,}2$ cm $\quad \alpha = 90°$

c) $a = 7{,}6$ cm $\quad b = c$

3 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC beträgt $15{,}75\ \text{cm}^2$. Die Seite [BC] ist 7 cm lang. Berechne h_a und zeichne ein Dreieck mit diesen Eigenschaften. Miss die Längen von [AB] und [AC].

4 In einem Parallelogramm ABCD mit $\beta = 110°$ ist die Grundlinie [AB] 7,2 cm lang, die zugehörige Höhe beträgt 4,8 cm. Durch die Diagonale [AC] wird es in zwei Dreiecke zerlegt. Zeichne die Dreiecke und berechne ihren Flächeninhalt.

5.1 Konstruiere Dreieck ABC aus $b = 6{,}5$ cm, $h_b = 4{,}8$ cm und $c = 5{,}2$ cm (2 Lösungen).

5.2 Zeichne die Höhe $[CF_c]$ ein und berechne ihre Länge h_c in beiden Fällen.

6.1 Konstruiere Dreieck ABC aus $c = 7$ cm, $h_c = 5{,}6$ cm und $\beta = 48°$.

6.2 Berechne den Flächeninhalt von Δ ABC.

6.3 Wo liegen die Eckpunkte C_n aller Dreiecke ABC_n, die mit dem Dreieck ABC in der Seite [AB] und im Flächeninhalt übereinstimmen?

6.4 Zeichne alle rechtwinkligen Dreiecke ein, welche die Eigenschaften von 6.3. erfüllen.

7.0 Von einem Dreieck AB_nC sind A und C gegeben, die Punkte B_n liegen auf der Geraden g.
$A(-2|-3) \qquad C(-2|1) \qquad g\colon y = -\frac{1}{2}x + 6$

7.1 Gib die Koordinaten der Punkte B_1, B_2 und B_3 für $x \in \{1; 3; 6\}$ an und zeichne die Dreiecke AB_1C, AB_2C und AB_3C.

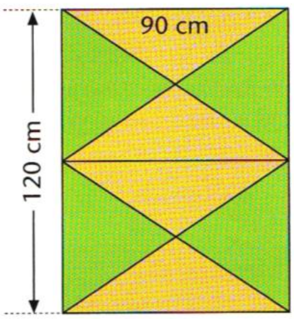
7.2 Berechne die Flächeninhalte der gezeichneten Dreiecke.

7.3 Für einen Punkt B_4 auf g gibt es kein Dreieck. Warum? Berechne die Koordinaten von B_4.

7.4 Für welchen Wert von x erhält man ein rechtwinkliges Dreieck (zwei Lösungen)? Wie groß ist dessen Flächeninhalt?

8.1 Omas Tischdecke besteht aus verschiedenen geometrischen Figuren. Welche erkennst du?

8.2 Welchen Flächeninhalt haben die verschieden gefärbten Teile?



9 Eine quadratische, 120 cm lange Tischdecke liegt symmetrisch auf einem ebenfalls quadratischen Tisch, so dass die überhängenden dreieckigen Stücke zusammen genau ein Neuntel der Tischdecke ausmachen. Welche Abmessungen haben die überhängenden Teile? Wie groß ist der Tisch?

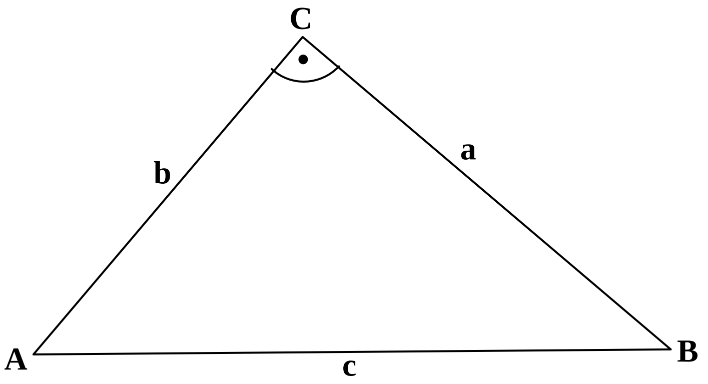
Aufgaben (Thema Mathe, S. 67)

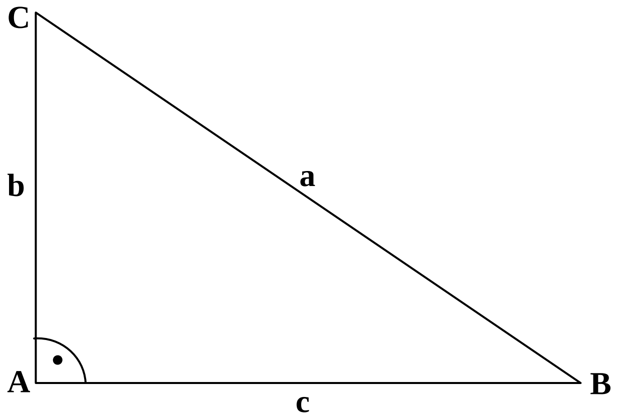
1. a) $A = 0{,}5 \cdot 6{,}1cm \cdot 5{,}8cm$; **$A = 17{,}69cm^2$**

b) $c = 3243\ dm^2 : 69dm$; **$c = 47cm$ (= 4,7 m)** **(1m = 10dm)**

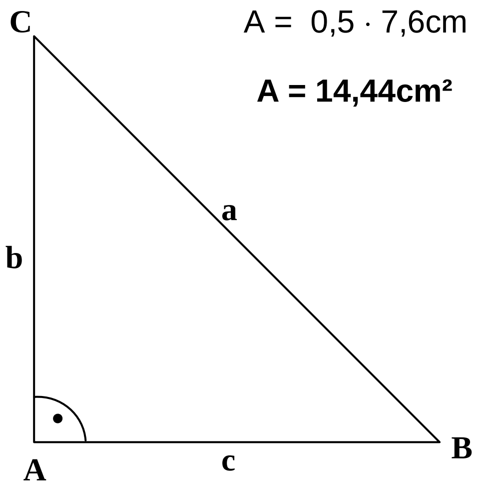
c) $h = 843200m^2 : 400m$; **$h = 2108m$ (=2,108km)** **(1ha = 10000m²)**

2. a) A = $0{,}5 \cdot 6{,}5cm \cdot 5{,}5cm$; **$A = 17{,}88cm^2$** **b)** $A = 0{,}5 \cdot 4{,}9cm \cdot 7{,}2cm$; **$A = 17{,}64cm^2$**





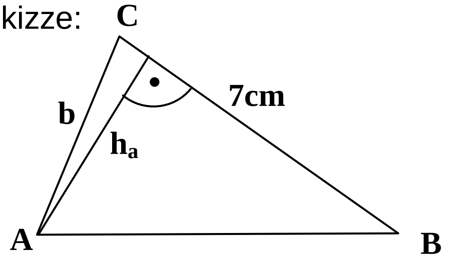
c)



$A = 0{,}5 \cdot 7{,}6cm \cdot 3{,}8cm$

$A = 14{,}44cm^2$

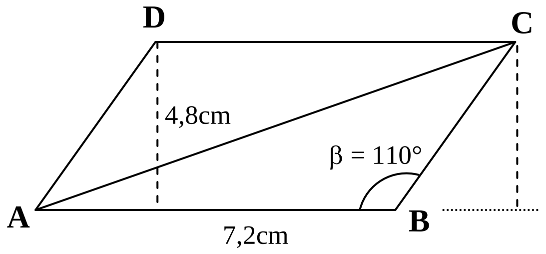
3. Skizze:



$15{,}75cm^2 = 0{,}5 \cdot 7cm \cdot h_a\,cm$ | : 3,5

$h_a = 4{,}5cm$

4. Skizze



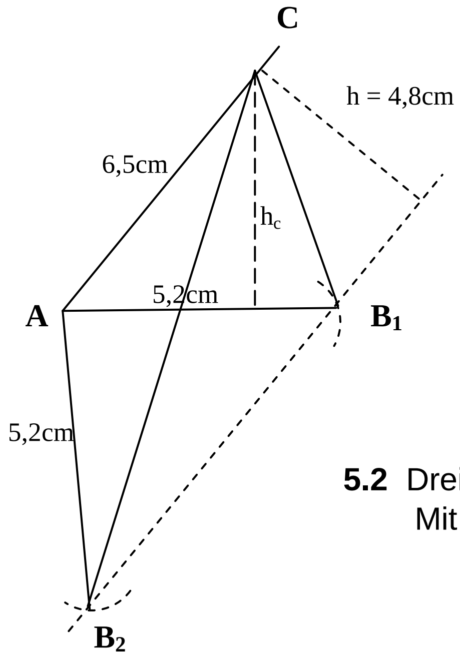
Die Höhe $h_{[AB]}$ des Dreiecks ABC beträgt 4,8cm.

A = 0,5 ·7,2cm · 4,8cm;

A_{ABC} = 17,28cm² (= A_{ACD})

5. Skizze der Konstruktion:

5.1



- Zeichne [AC]
- trage die Parallele im Abstand von 4,8cm an
- Markiere die Kreisschnittpunkte von K(A; r = 5,2cm) ∩ Parallele
- verbinde die Strecken AB_1 zum Dreieck AB_1C und AB_2 zum Dreieck AB_2C

5.2 Dreieck AB_1C: A = 0,5 · 6,5cm · 4,8cm = 15,6 cm²

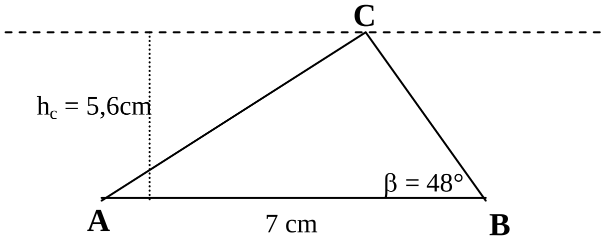
Mit Grundseite AB_1: 15,6cm² = 0,5 · 5,2 · h_c

15,6 = 2,6 · h_c **|** : 2,6

h_c = 6cm

Dreieck AB_2C: Auch hier beträgt: h_c = 6cm, weil die Länge der Grundseite $[AB_2]$ ebenfalls 5,2cm ist.

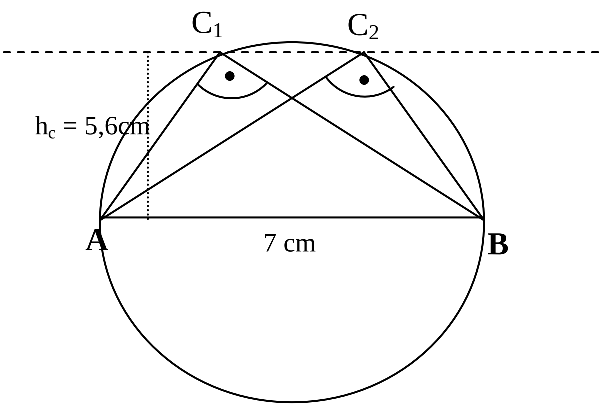
6.1 Skizze:



6.2 A = 0,5 · 7cm · 5,6cm = **19,6cm²**

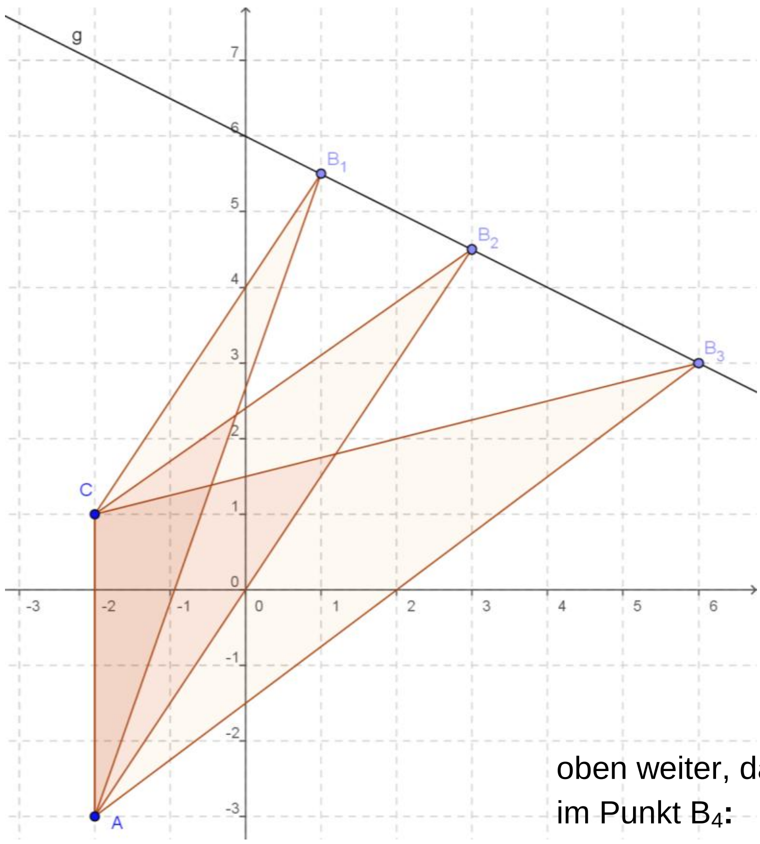
6.3 Die Punkte Cn liegen alle auf der Parallelen zu [AB]

6.4 Thaleskreis



7.1 g: $y = -0{,}5x + 6$

$B_1(1|\ ?)$ $y = -0{,}5\cdot 1 + 6$; $y = 5{,}5$ → $\mathbf{B_1(1|\ 5{,}5)}$
$B_2(3|\ ?)$ $y = -0{,}5\cdot 3 + 6$; $y = 4{,}5$ → $\mathbf{B_2(3|\ 4{,}5)}$
$B_3(6|\ ?)$ $y = -0{,}5\cdot 6 + 6$; $y = 3$ → $\mathbf{B_3(6|\ 3)}$



7.2 Höhe auf [AC] ist sinnvoll;

→ ist jeweils der x-Abstand von A zu B_1 (bzw. B_2, B_3)

Länge von [AC]: $y_C - y_A$

$1 - (-3) = 4$

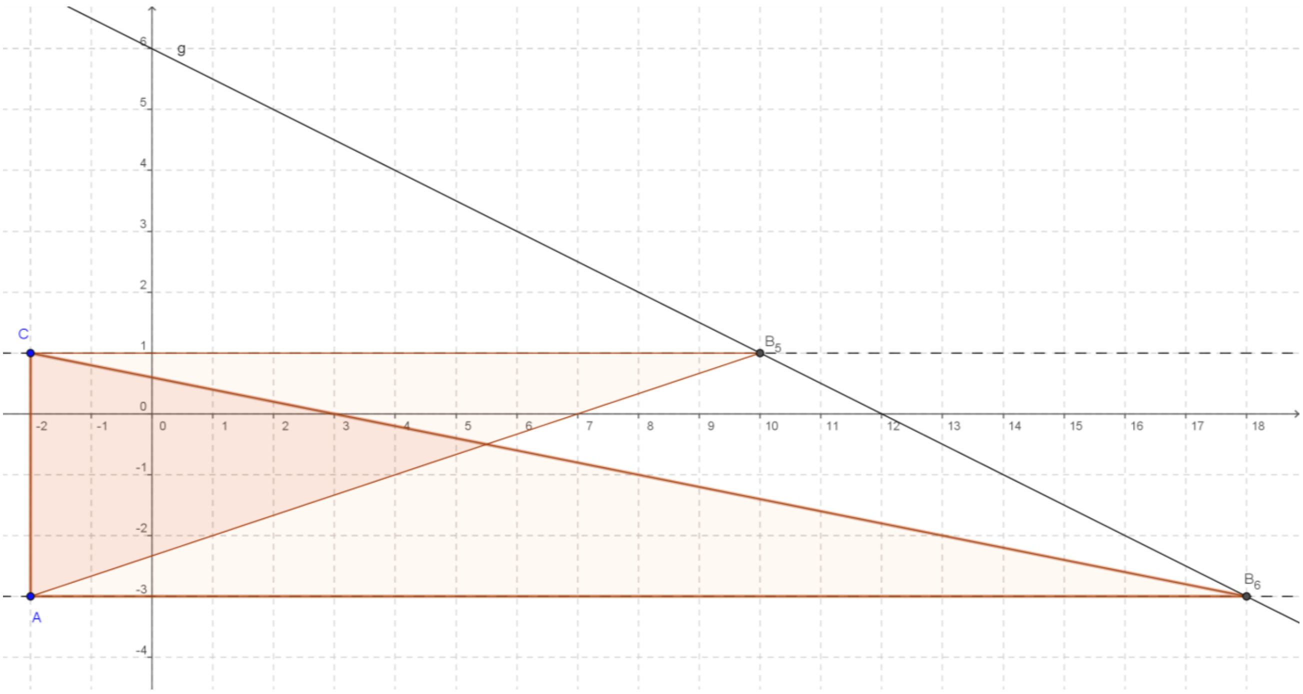
$h_1 = x_{B1} - x_A$; $1 - (-2) = 3$
$\mathbf{A_1 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 3 = 6\ cm^2}$

$h_2 = x_{B2} - x_A$; $3 - (-2) = 5$
$\mathbf{A_1 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 5 = 10\ cm^2}$

$h_3 = x_{B3} - x_A$; $6 - (-2) = 8$
$\mathbf{A_1 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 8 = 16\ cm^2}$

7.3 Verlängert man [AC] nach oben weiter, dann schneidet diese Linie die Gerade im Punkt B_4**:** $y = -0{,}5\cdot(-2) + 6$; $y = 7$; $\mathbf{B_4(-2\ |\ 7)}$

7.4 Ein rechtwinkliges Dreieck ist nur möglich, wenn entweder $\sphericalangle ACB_5$ oder $\sphericalangle B_6AC$ ein rechter Winkel ist:



Berechnung x-Wert von B_5: $B_5(?|\ 1)$; $1 = -0{,}5x + 6 \mid -6$

$-5 = -0{,}5x \mid :(-0{,}5)$

$x = 10 \rightarrow$ **$B_5(10|\ 1)$**

Berechnung x-Wert von B_6: $B_6(?|-3)$; $-3 = -0{,}5x + 6 \mid -6$

$-9 = -0{,}5x \mid :(-0{,}5)$

$x = 18 \rightarrow$ **$B_6(18|-3)$**

Länge der Strecke [AC] = 4cm; Länge der Strecke $[AB_5] = 10 - (-2) = 12$cm
Länge der Strecke $[AB_6] = 18 - (-2) = 20$cm

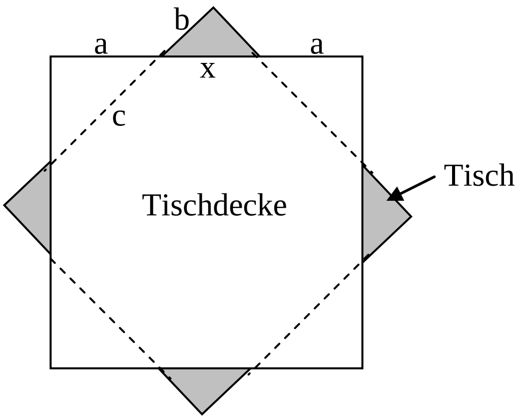
$A_1 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 12 = 24cm^2$
$A_2 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 20 = 40cm^2$

8.1 Gleichschenklige Dreiecke; Raute; Parallelogramm; Rechteck

8.2 Gelb (hellgrau): $A = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 90cm \cdot 30cm = 5400cm^2$ ($\rightarrow$ **$0{,}54m^2$**)

Grün (dunkelgrau): $A = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 60cm \cdot 45cm = 5400cm^2$ ($\rightarrow$ **$0{,}54m^2$**)

9. Skizze:



$A_{Tischdecke}$ = (120cm)² = 14400cm²; Ein Neuntel von 14400cm² = 14400 : 9 = 1600cm²

Ein Dreiecks-Stück das Übehängt hat die Fläche von 1600cm² : 4 = 400cm².
Es handelt sich um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit A = 400cm²;

(Aus der Formelsammlung): $A = \frac{c^2}{4}$ |· 4; 1600 = c²; **c = 40cm**

(Aus der Formelsammlung): $A = \frac{a^2}{2}$ |· 2; 800 = a²; **a = 28,28cm**

Größe des Tisches: x = 120cm – 2· 40cm = 40cm

→ Fläche graues Dreiecks = 400cm²
→ b = a = 28,28cm;

Seitenlänge des Tisches = 40cm + 2· 28,28cm = **96,57cm**